**Teoría de la integral y de la medida**
**Hoja nº 2** *(Medidas, conjuntos medibles)*

**1)** Sea $X = \{a, b, c, d\}$. Comprobar que la familia de conjuntos

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

es una $\sigma$ - álgebra en $X$.

**SOL**: Si consideramos la partición $X = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c, d\}$ en 3 conjuntos, observamos que los 8 conjuntos que constituyen $\mathcal{A}$ son todas las posibles uniones de algunos conjuntos de esta partición. De aquí es fácil comprobar que se cumplen todas las propiedades del $\sigma$ - álgebra. Podemos notar también que una colección $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ finita es una $\sigma$ - álgebra en $X$ si y solo si es álgebra en $X$.

**2)** Sea $X = \{a, b, c, d\}$. Construir la $\sigma$ - álgebra generada por

$$\mathcal{E} = \{\{a\}\} \ \text{ y por } \ \mathcal{E} = \{\{a\}, \{b\}\}.$$

**SOL**: En el primer caso, son 4 conjuntos, y el segundo, son 8.

**3)** Sea $g : X \to Y$. Sea $\mathcal{A}$ una $\sigma$ - álgebra en X. Probar que $\mathcal{B} = \{E \subset Y : g^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$ es una $\sigma$ - álgebra en $Y$.

**4)** Sea $g : X \to Y$. Sea $\mathcal{A}$ una $\sigma$ - álgebra en Y. Probar que $\mathcal{B} = \{g^{-1}(E) : E \in \mathcal{A}\}$ es una $\sigma$-álgebra en $X$.

**SOL**: Para 3 y 4 comprobar y luego usar que se tiene $g^{-1}(E^c) = \big(g^{-1}(E)\big)^c$ y $g^{-1}(\bigcup_k E_k) = \bigcup_k g^{-1}(E_k)$.

**5)** Determinar la $\sigma$ álgebra engendrada por la colección de los subconjuntos finitos de un conjunto $X$ no-numerable. **SOL**: $\mathcal{A} = \{A \subset X : A \text{ numerable o } A^c \text{ numerable }\}$.

**6)** Se dice que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ es una **álgebra** si cumple: i) $X \in \mathcal{A}$; ii) la unión **finita** de elementos de $\mathcal{A}$ está en $\mathcal{A}$, y iii) $\mathcal{A}$ es cerrada por complementos. Probar que una álgebra $\mathcal{A}$ en X es una $\sigma$ - álgebra si y solo si es cerrada para las uniones numerables crecientes, (es decir si $E_i \in \mathcal{A}, \quad E_1 \subset E_2 \subset, \ldots,$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$). **SOL**: Usar que dados $\{A_j\}_j$, si $B_n = \bigcup_{1 \le j \le n} A_j$ se tiene que $B_n$ crece y $\bigcup_n B_n = \bigcup_j A_j$.

**7)** Probar que la unión de una sucesión creciente de álgebras $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset ...$ es una álgebra. Pero dar ejemplos de que:
- la unión de dos álgebras puede no ser una álgebra, y
- la unión de la sucesión $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset ...$ de $\sigma$-álgebras puede no ser una $\sigma$-álgebra.

**SOL**: (1) Si $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset ...$ son álgebras sobre $X$, el conjunto $X$ pertenece a su unión, que es además cerrada respecto de complementos y de uniones finitas (si $B_1, \ldots, B_n$ pertenecen a $\bigcup_j \mathcal{A}_j$, entonces pertenecen a una de las álgebras $\mathcal{A}_n$). (2) Considerar $X = \{1, 2, 3\}$. Entonces $\mathcal{A} = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\big\}$ y $\mathcal{B} = \big\{\emptyset, \{2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\big\}$ son álgebras, mientras que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ no es cerrada respecto de uniones: $\{1\} \cup \{2\} \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. (3) Sea $X = \mathbb{N}$ y sea $\mathcal{A}_n$ la ($\sigma$-)álgebra generada por $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}$. Entonces la unión de las álgebras $\mathcal{A}_n$ solo contiene conjuntos $Y$ tales que $Y$ ó $Y^c$ es finito; esto no es una $\sigma$-álgebra.

**8)** Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Si $E, F \in \mathcal{A}$, comprobar que

$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F).$$

**SOL**: Utilizar que $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E)$.

**9)** Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Para $E \in \mathcal{A}$ fijo, definimos $\mu_E(A) = \mu(A \cap E)$. Probar que $\mu_E$ es una medida sobre $\mathcal{A}$.

**10)** (`Recordatorio`) Para una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\bar{\mathbb{R}}$ se definen $\limsup$ y $\liminf$ de la siguiente manera:

$$\limsup x_n := \sup A, \quad \liminf x_n := \inf A, \qquad \text{donde}$$
$$A := \{a \in \bar{\mathbb{R}} : a \texttt{ es límite de una subsucesión } (x_{n_k})_{k=1}^{\infty}\}.$$

Sean $a_m := \sup_{n:n \geq m} x_n$ y $b_m := \inf_{n:n \geq m} x_n$. Demostrar que:

**a)** $(a_m)$ es decreciente y $(b_m)$ es creciente y, en particular, convergen en $\bar{\mathbb{R}}$ y sus límites son, respectivamente, $\inf\{a_m : m \geq 1\}$ y $\sup\{b_m : m \geq 1\}$.

**b)** $\limsup x_n = \inf\{a_m : m \geq 1\}$ y $\liminf x_n = \sup\{b_m : m \geq 1\}$, es decir,

$$\limsup x_n = \inf_m \sup_{n:n \geq m} x_n, \qquad \liminf x_n = \sup_m \inf_{n:n \geq m} x_n$$

**c)** La sucesión tiene límite si y solo si $\limsup x_n = \liminf x_n$ y, en ese caso, $\lim x_n = \limsup x_n = \liminf x_n$.

**d)** $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$. ¿Cuál es la desigualdad para $\liminf$?

**e)** Si $\limsup x_n > b$, entonces existen infinitos $n$'s tales que $x_n > b$. ¿Es cierto el recíproco?

**11)** Sea $X$ un conjunto y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de $X$. Se definen los conjuntos $\underline{E} := \liminf E_n \equiv \bigcup\limits_m \bigcap\limits_{n \geq m} E_n$ y $\overline{E} := \limsup E_n \equiv \bigcap\limits_m \bigcup\limits_{n \geq m} E_j$.

**a)** Demostrar que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \subset \underline{E} \subset \overline{E} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

**b)** Hallar $\underline{E}$ y $\overline{E}$ cuando $\{E_n\}$ es una sucesión creciente, cuando $\{E_n\}$ es una sucesión decreciente, y cuando los $\{E_n\}$ son disjuntos dos a dos.

**c)** Encontrar un ejemplo en $X = \mathbb{R}$ donde $E_n$ sean intervalos tales que $\underline{E} \neq \overline{E}$.

**d)** Comprobar que $\limsup E_n$ es el conjunto de puntos que pertenece a $E_n$ para infinitos $n$'s.

**12)** Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Se definen las operaciones de conjuntos $\liminf E_j := \bigcup_n \bigcap_{j \geq n} E_j$; $\limsup E_j := \bigcap_n \bigcup_{j \geq n} E_j$. Sean $E_j \in \mathcal{M}$ , $j \geq 1$ . Probar que si $\mu(\cup E_j) < \infty$:

$$\mu(\liminf E_j) \leq \liminf \mu(E_j), \qquad \mu(\limsup E_j) \geq \limsup \mu(E_j).$$

En particular si $\mu(X) < \infty$ entonces:

**a)** $\mu(\liminf E_j) \leq \liminf \mu(E_j) \leq \limsup \mu(E_j) \leq \mu(\limsup E_j)$

**b)** Si existe $\lim E_j$, entonces $\mu(\lim E_j) = \lim \mu(E_j)$

**13)** Sea $X$ un conjunto infinito numerable. Consideremos la $\sigma$ - álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Para cada $A \in \mathcal{A}$ definimos

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es finito,} \\ \infty & \text{si } A \text{ es infinito.} \end{cases}$$

**a)** Probar que $\mu$ es finitamente aditiva, pero no numerablemente aditiva.

**b)** Probar que $X = \lim_{n\to\infty} A_n$, para cierta sucesión creciente de conjuntos $\{A_n\}$, tales que $\mu(A_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

**14)** Sea $X = \{a_1, a_2, a_3\}$, sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Sea $\mu$ una medida que verifica
$\mu(a_1) = \mu(a_2) = \mu(a_3) = \frac{1}{3}$. Consideremos la sucesión de conjuntos

$$A_n = \{a_1, a_2\} \quad \text{si } n \text{ es par}, \qquad A_n = \{a_3\} \quad \text{si } n \text{ es impar}.$$

Probar que $\mu(\liminf A_n) < \liminf \mu(A_n) < \limsup \mu(A_n) < \mu(\limsup A_n)$.

**15)** Sean $\{A_n\}$ conjuntos medibles tales que $\sum_{n=1}^{n=\infty} \mu(A_n) < \infty$. Demostrar que cada elemento $x$ pertenece a un número finito de $A_n$ para c.t.$x$. (Dicho de otra manera el conjunto de los puntos $x$ que pertenecen a infinitos de los $A_n$, es decir, $\limsup A_n$, mide cero.)

**16)** Sea $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ un espacio de medida completo, es decir, tal que todos los subconjuntos de un conjunto medible de **medida cero** también son medibles.. Sea $g : X_1 \to X_2$ una aplicación, $\mathcal{A}_2 = \{A \subset X_2 : g^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1\}, \quad \mu_2(A) = \mu_1(g^{-1}(A))$. Comprobar que $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ es un espacio de medida completo. **NOTA: $\mu_2$ se le denomina medida inducida en $X_2$ por la aplicación $g$.**